幾何学的関数論と拡散過程が関連する話題から : 複素葉層構造を中心に (確率論シンポジウム)

厚地, 淳

数理解析研究所講究録
第 1855 巻 2013 年 47-55

幾何学的関数論と拡散過程が関連する話題から - 複素葉層構造を中心に -

慶應義塾大学・経済学部 厚地 淳
Atsushi Atsuji
Keio University

近年、幾何学的関数論における問題に対して拡散過程を用いる方法が取り入れらてれているが、このノートでは、特に、葉層構造に対するアプローチについて概観したい。以下の6つのセクションからなる。

1. holomorphic diffusions 定義と概観
2. foliated manifolds, laminations.
3. harmonic measures and diffusions on foliated manifolds.
4. applications 1 -nonsingular cases-.
5. singular cases.
6. applications 2.

1 holomorphic diffusions 定義と概観

複素関数論に適合した拡散過程として知られている 正則拡散過程 (holomorphic diffusion) の定義を見、知られている結果を概観する。本セクションの内容については雑誌『数学』にある金子宏氏の論説 [28] に詳しいので、そちらをご覧になるとよい。

まず正則拡散過程を定義する。

Definition 1 M を複素空間, X_t を M 上の拡散過程とする. $\forall U \subset M$ *(U: open)*, $\forall f \in \mathcal{O}(U)$ に対して X が U に滞在している間, $Ref(X_t)$ が 局所マルチンゲールになる時、X を M 上の正則拡散過程 *(holomorphic diffusion)* という。

[例]. 今、複素葉層構造への応用を見込んで次のような場合を考える。

L を Hermite 多様体、$g = g_{\alpha\overline{\beta}}$ をその上の Hermite 計量, 対応する基本形式を $\omega = \frac{i}{2}g_{\alpha\overline{\beta}}dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$ とする。$\dim_{\mathbf{C}} L = l$ とする. g に 対応する複素ラプラシアン (complex Laplacian) を

$$\Box_L := 2g^{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial\overline{z}_\beta}$$

で定義する。これを生成作用素にもつ拡散過程を (X_t, P_x) とすると、(X_t, P_x) は L 上の正則拡散過程になる。

Remark. 一般には 上の (X_t, P_x) は対称にならない。次が成り立つ。

$$g \text{ は Kähler(i.e. } \omega : \text{closed)} \quad \Leftrightarrow \quad \Box_L = \frac{1}{2}\Delta_L.$$

ここで、Δ_L は L のリーマン多様体としてのラプラシアンである。L が Kähler 多様体の時、$\frac{1}{2}\Delta_L$ を生成作用素とする正則拡散過程を L 上のブラウン運動と呼ぶ。

関数論への応用上、定義から直ちに得られる次の性質が重要である。

Proposition 2 $f : L \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ が正則写像、 (X_t, P_x) が L 上の正則拡散過程ならば、$f(X_t)$ は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上の時間変更をしたブラウン運動である.

福島-岡田 [20] は次のような Dirichlet 形式を用いて対称な正則拡散過程を構成した。

$$\mathcal{E}_\theta(u, v) = \frac{1}{2}\int_L du \wedge d^c v \wedge \theta,$$

where θ : a closed current of bidegree $(l-1, l-1)$ (of dimension (1,1)). この福島-岡田による正則拡散過程などを用いて次のような結果が知られている。

- construction, pluripotential theory, plurisubharmonic functions (福島-岡田 [20],[21])
- Liouville property for bounded plurisubharmonic functions (H.Kaneko [30])
- Domain of holomorphy and conservativeness (S.Taniguchi[35],[36]) $\to$ 拡張して Stein 多様体の確率論的特徴づけはどうか?
- Monge-Ampére equations (B.Gaveau[23], H.Kaneko[29]) $\to$ 最近の結果との関係は? (Calabi's problem, Ricci flow,etc.[26])

最後のものは複素 Monge-Ampére 方程式に関するものである。これは非線形の難しい方程式であるが、種々の重要な問題と関係し、最近よく研究されている。[26] には最近の話題がいろいろ解説されており、確率論的アプローチにも言及がある。

2 foliated manifolds, laminations

本セクションでは葉層構造を持つ多様体についてその定義と基本事項について述べる。特異点を持たない foliated manifold を $(M, \mathcal{L})$ と書くことにする。特異点を持つ場合については 5 において見る。M が ambient space を、$\mathcal{L}$ が葉 (leaf) の全体を表す。特異点を持たないとき、 M はコンパクトとする。

Definition 3 *(non-singular foliation)*

$(M,\mathcal{L})$ が C^r 葉層構造を持つ多様体 *(C^r-foliated manifold)* $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ M は連結な $l+m$-*dim* 多様体で次のような座標系を持つ。: $\exists\{U_i,\phi_i\}$ *s.t* $\phi_i : U_i \to D_i \times Z_i$ (*homeo*) $D_i \subset \mathbf{R}^l$, $Z_i \subset \mathbf{R}^m$, かつ、 もし $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ならば、 $\psi_{ij} := \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ は次を満たす。$\psi_{ij}(y,z) = (\alpha(y,z), \beta(z))$ と書け、$\alpha(y,z)$ は y について C^r 級, その y についての k 次微分は z について連続 $(0 \le k \le r)$, $\beta(z)$ は連続である。

$\phi_i^{-1}(D_i \times \{z\})$ $(z \in Z_i)$ を plaque と呼ぶ.
L は 葉 (leaf) であるが、これは 可算個の plaque の和になっている弧状連結な集合である。$\dim_{\mathbf{C}} L = l$. $Z := \bigcup_i Z_i$ は、 a transversal manifold または transversals と呼ばれる.

上の定義で $D_i \subset \mathbf{C}^l$, $\alpha(y,z)$: y について正則、となるとき, $(M,\mathcal{L})$ を複素葉層構造を持つ多様体 (foliated manifold with complex foliation, or complex foliation) と呼ぶ. さらに Z が複素多様体, $\psi_{ij}(y,z)$ が正則写像となるとき、$(M,\mathcal{L})$: を正則葉層構造を持つ多様体 (a foliated manifold with holomorphic foliation, or holomorphic foliation) と呼ぶ.

複素解析学的に興味のある complex foliation が現れるクラスの例としては、Levi 平坦曲面 (Levi-flat surfaces, levi-flats) がある. N を複素多様体, $M \subset N$ を実超曲面とする. 次が知られている。

M: a Levi-flat surfaces $\Leftrightarrow$ M devides N to Stein domains. $\Leftrightarrow$ M is a complex foliation of (real) codimension 1.

Levi-flats を持つような N の例はいろいろ知られているが、$N = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ $(n \ge 3)$ の時は、なめらかな Levi-flats は存在しないことが知られている (Siu[34] による.) 解析的の時は、Lins Neto による [31]. そこで、現在問題になっているのは $n=2$ の場合であり、現在でも未解決である。すなわち、$\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ に含まれる complex foliation を調べることは十分興味深い問題である。

関係する概念として極小集合 (Minimal sets) がある. $(M,\mathcal{L})$ (possibly singular) の minimal set とは、特異点を含まない空でない closed saturated set で minimal なものを言う。これは複素に限らず定義される。M がコンパクトならば, minimal set は常に存在する. $M = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ のようなとき非特異な正則葉層構造は存在しない。すなわち、このような対象では後述するような特異点のある葉層構造を考える必要があり、このとき M は非コンパクトである。そして、$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ $(n \ge 3)$ 内の特異正則葉層構造を持つ多様体には非自明な極小集合は存在しないことが知られている (Lins Neto[31])。ここでも $n=2$ の時は未解決である。

3 harmonic measures and diffusions on foliated manifolds

ここでは 非特異な葉層構造の場合に、Lucy Garnett[22] の導入した harmonic measure と対応する拡散過程ついて述べる。ここで言う harmonic measure とは、関数論に現れる調和関数を表現する測度、所謂調和測度とは異なる。葉層構造の研究者の間ではすでに確立され

た用語であるのでそのまま用いることにする。harmonic measure は leafwise Laplacian を生成作用素とする拡散半群の不変測度である。M がコンパクトならば、harmonic measure は常に存在する。Garnett はこの測度を用いて葉層の統計的性質を見ようとした。その後、葉層構造の研究において頻繁に用いられるようになり、特に、E.Ghys は、これを用いて種々の性質を導いている ([24]). leafwise Laplacian とは、各葉に沿って葉に与えられたリーマン計量に対応する Laplacian として作用するものである。これに対応して拡散半群が存在するが、これは各葉上ではリーマン計量に対応するブラウン運動の熱半群と一致する (Candel[6])。このブラウン運動のことを leafwise Brownian motion と呼ぶことにするが、応用上、これに関する M 上でのエルゴード定理が基本的で重要な道具となる。

今我々は、同様なことを leafwise holomorphic diffusion に対して行う。

$(M,\mathcal{L})$ を非特異な複素葉層構造を持つ多様体とする。M はコンパクトな多様体とし、各葉 L は Hermite 多様体とする。L 上の計量はなめらかで、その葉に沿った微分はすべての階数について M 上で連続とする。M はコンパクトであるから、各葉のリッチ曲率は一様に下に有界である。

$\Box_L$ を §1 で導入した複素ラプラシアンとする。$\Box u(x) := \Box_L u(x)\ (x \in L)$ とおく.

Definition 4 *m: $\Box$-harmonic (probability) measure on* $(M,\mathcal{L})$

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\int_M \Box u(x)dm(x) = 0$$

for $\forall u$: leafwise C^2fuction, and $m(M) = 1$.

次が知られている。

- M:compact $\Rightarrow \exists m$ (Hahn-Banach th).
- 各葉が Kähler 多様体ならば, 次のような m の局所的な表現が知られている: $M \supset U \to D \times Z,\ x \mapsto (y,z)$ を flow-box とする.
  $\exists h(y,z)$: positive harmonic function in y locally on each leaf s.t. for $\phi \in C_0(U)$
  $$\int_U \phi(x)dm(x) = \int_{D\times Z} h(y,z)\phi(y,z)dv_{L_x}(y)d\nu(z)$$
  where dv_{L_x}: Riemannian volume measure on L_x(x を含む leaf).

$\Box$ を生成作用素とする M 上の拡散過程 (X_t,P_x) が得られる。これは各葉に制限すると正則拡散過程になる。$\Box$-harmonic measure m は、(X_t,P_x) の不変測度になり、次のエルゴード定理が成り立つ。D_t を対応する拡散半群とする。

Theorem 5 1) $f \in L^1(m)$ ならば,

$$\frac{1}{t}\int_0^t D_s f(x)ds \underset{t\to\infty}{\to} \exists f^*(x)\ m-a.e.\ x,$$

ここで、 f^* は各葉に沿って定数かつ

$$\int_M f^*(x)dm(x) = \int_M f(x)dm(x).$$

2)

$$P_x(\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds \underset{t\to\infty}{\to} f^*(x)) = 1$$

$m-a.e.\ x$.

3) m: *ergodic* $\Rightarrow f^*(x) = \int_M f(x)dm(x)$.

4 applications 1 -nonsingular cases-

ここでは、leafwise Brownian motion を用いた幾何学的関数論に関連する研究のいくつかを見る。

- Liouville property(Kaimanovich[27], Fenley, Feres and Parwani[15], Feres and Zeghib[16]),
- Transversal invariance of harmonic measures(Deroin and Kleptsyn[11], S.Matsumoto[32]),
- Unique ergodicity(Deroin and Kleptsyn[11], Fornaes and Sibony[18]),
- Ends of leaves (Ghys[24]),
- Minimal sets and Levi-flat surfaces(Deroin and Dupont[12]).

ここで言う Liouville property とは、2通りの意味がある。ひとつは各葉の Liouville 性を議論するものである。すなわち、リーマン面の型問題のように、各葉上で非定数の有界調和関数が存在するかどうかを議論する。Kaimanovich は covering manifolds のときと同様にエントロピーを用いて議論した。他方、各葉上で調和で、M 上では連続な関数を考えることもある。このような関数を continuous leafwise harmonic function と呼ぶことにする。これらが定数以外許容されるかどうかを議論するものもある (Fenley, Feres and Parwani)。これらに関連するものとして、葉の放物性 (leaf 上の Brownian motion の再帰性) を議論するものもある (Brunella[5], Nishino, Yamaguchi[37])。

5 singular cases

ここでは特異点つきの葉層構造を考える。複素葉層構造・正則葉層構造を考えるとき、特異点が現れる場合が多い。従って、複素関数論的には特異点つきの葉層構造を考えるのは自然である。我々が考えるのは次のような状況である。N を複素多様体とし、$M \subset N$ が次を満たすとする。$(M, \mathcal{L})$ が complex foliation で、$\overline{M} = N$. $N \setminus M$ が特異点の集合である。たとえば、$N = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ で、葉層構造が正則ベクトル場によって与えられるときは、このような状況である。現状では、各葉が複素次元1のとき、すなわちリーマン面のときが

主に考察されている。この分野は高次元化などこれからの発展が期待されるが、1 次元の場合でも前述したような種々の未解決問題がある。この場合も前述した non-singular なときと同じような事柄を問題とすることができ、確率論的考察が有効ではないかと考えられる。上述のような特異点つき複素葉層構造を $(M, \mathcal{L}, S)$ で表す。ただし、$S = \overline{M} \setminus M$ は特異点の集合である。

今簡単のため $(M, \mathcal{L}, S)$ は複素射影空間 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ に含まれるとし、各 L は $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の 1 次元複素部分多様体 (リーマン面) になっているとする。

Definition 6 開リーマン面 L の普遍被覆が 単位円板 $\mathbb{D}$ に同型の時、L を双曲的と呼ぶ。普遍被覆が $\mathbf{C}$ に同型の時、L を放物的と呼ぶ。

Remark. 上の名称はリーマン面の分類に関する古典理論の用語と異なる。

$L \in \mathcal{L}$ はすべて双曲的であるとする。$\phi_a : \mathbb{D} \to L_a$ を 普遍被覆写像で $\phi_a(0) = a$ となるものとする.

$X_t := \phi_a(Z_t)$ とおき、 P_a を $P_a(X_t \in A) = P(\phi_a(Z_t) \in A)$ $(A \in \mathcal{B}(M))$ で定義する. ここで、Z_t は $\mathbb{D}$ 上の Poincaré 計量に対応するブラウン運動で $Z_0 = o$ となるものである。

Proposition 7 *([2],[3])* (X_t, P_a) は M 上の 保存的な *leafwise holomorphic diffusion* である.

T を $(M, \mathcal{L}, S)$ に付随する harmonic current (cf. [18],[19]) とする。T は bidegree(1,1) の $\partial\overline{\partial}$-closed な M 上の current である。ω_P を 普遍被覆写像を通じて $\mathbb{D}$ 上の Poincaré 計量から L 上に誘導される Hermite 計量の基本形式とする。ω_P は 各葉上では滑らかな計量を定義するが、これが M 全体ではボレル可測になっていることが知られている (cf.[13])。

$$m_P := T \wedge \omega_P$$

とおく。これは M 上の有限測度になり、正規化して $m_P(M) = 1$ としたものを再び、m_P と書く。$\Box u = 2i\partial\overline{\partial}u \wedge T/dm_P$ とおくと、$\Box$ は (X_t, P_a) の生成作用素になることがわかる。さらに、m_P は、$\Box$-harmonic measure であり、(X_t, P_a) の不変測度になる。この拡散過程に対しても非特異の時と同じようにエルゴード定理が成立することがわかる。

6 applications 2

これまでの簡単な応用として leafwise meromorphic function の値分布に関する筆者の結果を述べたい。leafwise holomorphic diffusion を導入することで話が非常に易しくなることを注意したい。leafwise meromorphic function は Ghys, Berndtsson-Sibony([4]) によって考察されているが、まだ構成を議論しているくらいの新しい対象である。我々はそのような基礎的研究を飛び越えて値分布を議論しようとするのである。それは複素葉層構造による leafwise meromorphic function の存在に関する制限事項を与えることになり、基礎研究としても意味があるのではないかと考えている。なお、従来の研究としては 有界な leafwise holomorphic function の存在・非存在を問う研究 (Liouville 型定理)[17] があった。

Definition 8 ボレル可測写像 $f : M \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ が *leafwise meromorphic function* とは、f の 任意の葉への制限 $f : L \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ $(\forall L \in \mathcal{L})$ が正則写像になっていることである。

前節と同様に、$(M, \mathcal{L}, S)$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ に含まる複素葉層とし、各葉は双曲的リーマン面になっているとする。f のエネルギー $e(f)$ を

$$e(f) := \frac{1}{2}\int_M ||df||^2(x) dm_P(x) \quad (\leq \infty)$$

で定義する。ただし、m_P は前節で定義した Poincaré 計量から誘導される Hermite 計量から定義される harmonic measure である。

Theorem 9 f を $(M, \mathcal{L}, S)$ 上の非定数 *leafwise meromorphic function* とする。 m_P がエルゴード的ならば、$m_P(G) = 1$ となる *saturated set* G が存在して、

$$\#(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus f(L)) \leq 2 + \frac{2}{e(f)}, \quad \forall L \in G.$$

Remark. 1.Fornaes-Sibony は、$N = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, S が双曲的かつ線形化可能であり、$\mathcal{L}$ が代数的葉を含まないならば、m_P は ergodic になることを示している ([18])。
2. 上の定理は [1] で用いた拡散過程に基づく Nevanlinna 理論の手法を 我々の holomorphic diffusion に応用して得られる。

また、最近筆者は同様な手法を用いて $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 内の複素葉層の葉の分布についても結果を得ている ([2])。

参考文献

[1] Atsuji, A: On the number of omitted values by a meromorphic function of finite energy and heat diffusions. Jour.Geom. Anal. 20(2010), 1008-1025.

[2] Atsuji, A: Value distribution of leaves of complex foliations on complex projective spaces.preprint, 2013.

[3] Atsuji, A: Remarks on value distribution of leafwise meromorphic functions on complex foliations. in preparation.

[4] Berndtsson, Bo; Sibony, Nessim: The $\overline{\partial}$-equation on a positive current. Invent. Math. 147 (2002), no. 2, 371-428.

[5] Brunella, Marco: Some remarks on parabolic foliations. Geometry and dynamics, 91-102, Contemp. Math., 389, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[6] Candel, Alberto: The harmonic measures of Lucy Garnett. Adv. Math. 176 (2003), no. 2, 187-247.

[7] Candel, A.: Uniformization of surface laminations. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 26 (1993), no. 4, 489-516.

[8] Candel, A.; Conlon, Lawrence: Foliations. I. Graduate Studies in Mathematics, 23. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xiv+402 pp. ISBN: 0-8218-0809-5

[9] Candel, A.; Conlon, L.: Foliations. II. Graduate Studies in Mathematics, 60. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+545 pp. ISBN: 0-8218-0881-8

[10] Candel, A.; Gomez-Mont, X.: Uniformization of the leaves of a rational vector field. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 4, 1123-1133.

[11] Deroin, B.; Kleptsyn,Victor: Random conformal dynamical systems. Geom. Funct. Anal. 17 (2007), no. 4, 1043-1105.

[12] Deroin,B; Dupont,Christophe: Topology and dynamics of Levi-flats in surfaces of general type. preprint(2012).

[13] Dinh, T.-C.; Nguyen, V.-A.; Sibony, N.: Heat equation and ergodic theorems for Riemann surface laminations. Math. Ann. 354 (2012), no. 1, 331-376.

[14] Dinh, T.-C.; Nguyen, V.-A.; Sibony, N.: Entropy for hyperbolic Riemann surface laminations I,II. arXiv:1105.2307, arXiv:1109.4489.

[15] Fenley, S.; Feres, R.; Parwani, K.: Harmonic functions on R-covered foliations. Ergodic Theory Dynam. Systems 29 (2009), no. 4, 1141-1161.

[16] Feres, R.; Zeghib, A.: Dynamics on the space of harmonic functions and the foliated Liouville problem. Ergodic Theory Dynam. Systems 25 (2005), no. 2, 503-516.

[17] Feres, R.; Zeghib, A.: Leafwise holomorphic functions. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 6, 1717-1725 (electronic).

[18] Fornæss, John Erik; Sibony, N.: Unique ergodicity of harmonic currents on singular foliations of $\mathbf{P}^2$. Geom. Funct. Anal. 19 (2010), no. 5, 1334-1377.

[19] Fornæss, J. E.; Sibony, N.: Harmonic currents of finite energy and laminations. Geom. Funct. Anal. 15 (2005), no. 5, 962-1003.

[20] Fukushima,M; Okada,M: On conformal martingale diffusions and pluripolar sets, J. Funct. Anal., 55 (1984), 377-388.

[21] Fukushima,M; Okada,M: On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions, Acta Math., 159 (1988), 171-214.

[22] Garnett,L: Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion, J. Funct. Anal. 51 (1983) 285-311.

[23] Gaveau,B: Methode du controle optimal en analyse complexe. II. Resolution des equations du Monge-Ampere daps des faiblement pseudo convexes, Bull. Sci. Math., 102 (1978), 101-128.

[24] Ghys,E: Topologie des feuilles generiques, Ann. Math. 141 (1995) 387-422.

[25] Ghys,E; Langevin,R; Walczak,P: Entropie geometrique des feuilletages, Acta Math. 160 (1988) 105-142.

[26] Guedj, Vincent(ed): Complex Monge-Ampere Equations and Geodesics in the Space of Kahler Metrics. Lect. Note. Math. vol.2038, Springer(2012).

[27] Kaimanovich, V. A.: Brownian motion on foliations: entropy, invariant measures, mixing. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22 (1988), no. 4, 82–83; translation in Funct. Anal. Appl. 22 (1989), no. 4, 326-328.

[28] 金子　宏　多重劣調和関数と複素多様体上の正則拡散過程 数学 41(4),345–375, 1989.

[29] Kaneko,H: A stochastic resolution of a complex Monge-Ampere equation on a negatively curved Kahler manifold, Osaka J. Math., 24(1987), 307-319.

[30] H. Kaneko, A stochastic approach to a Liouville property for plurisubharmonic functions, J. Math. Soc. Japan 41 (1989), no. 2, 291-299.

[31] Lins Neto, A. : A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations. Ann. l'inst. Fourier 49(1999), 1369-1385.

[32] Matsumoto, Shigenori: The dichotomy of harmonic measures of compact hyperbolic laminations. arXiv:1002.0394.

[33] Phong,D.H.; Sturm,Jacob: The Dirichlet problem for degenerate complex Monge-Ampere equations. To appear in Comm. in Analysis and Geometry.

[34] Siu, Y.-T.: Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension ≥ 3, Ann. Math. 151(2000), 1217-1243.

[35] Taniguchi,S: Explosion problem for holomorphic diffusion processes and its applications, Osaka J. Math., 26 (1989),931-951.

[36] Taniguchi,S: Kahler diffusion processes associated with the Bergman metric and domains of holomorphy, Proc. Japan Acad., 64 Ser. A (1988), 184-186.

[37] Yamaguchi, Hiroshi: Parabolicité d'une fonction entiére. J. Math. Kyoto Univ. 16(1976), 71-92.